**Προπτυχιακό Μάθημα: «Πιθανότητες & Στατιστική»**

**Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής,**
**Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων,**
**Ακαδημαϊκό έτος 2014-15**

# 2η Σειρά Ασκήσεων

*Ημερομηνία Παράδοσης :* ***6/11/2014***

**Άσκηση 1. (πρόοδος 2013-14)** Μια τ.μ. *X* έχει σ.π.π. $f(x)=\begin{cases} cx & 0<x<\sqrt{2} \\ 0 & \alpha\lambda\lambda\iota\omega\varsigma \end{cases}$.

α) Να υπολογιστεί η σταθερά *c*.
β) Να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας (σ.κ.π.) *F(x)*.
γ) Να βρεθεί η μέση τιμή και η διακύμανσή της.

**Άσκηση 2. (πρόοδος 2013-14)** Ο τελικός βαθμός στα μαθήματα του 3ου εξάμηνου του Τμήματος Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής έχει βρεθεί ότι ακολουθεί την κανονική κατανομή με παραμέτρους μ=60 και $\sigma^2$=625 (υποτίθεται ότι η βαθμολογία παίρνει τιμές στο [0, 100]).
α) Να βρεθούν οι πιθανότητες για ένα διαγώνισμα:
- α1) ο βαθμός να μην ξεπερνά το 50,
- α2) ο βαθμός να είναι τουλάχιστον 70
- α3) ο βαθμός να είναι μεταξύ 70 και 90

β) Εάν το εξάμηνο έχει 5 μαθήματα, να βρεθεί η πιθανότητα η βαθμολογία σε τουλάχιστον 2 μαθήματα να είναι τουλάχιστον 70.

**Άσκηση 3. (πρόοδος 2013-14)** Η αντοχή ενός ανυψωτικού μηχανήματος ακολουθεί την κανονική κατανομή με παραμέτρους μ=8 (τόνους) και $\sigma^2$=9.
α) Να βρεθούν οι πιθανότητες ένα μηχάνημα:
- α1) να μην καταφέρει να σηκώσει αντικείμενα άνω των 10 τόνων,
- α2) να ανυψώνει αντικείμενα μεταξύ 7 και 10 τόνων

β) Εάν επιλέξουμε 5 ανυψωτικά μηχανήματα από μία μάντρα, να βρεθεί η πιθανότητα τουλάχιστον 3 μηχανήματα να είναι σε θέση να σηκώνουν αντικείμενα μεταξύ 7 και 10 τόνων.
γ) Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός μηχανημάτων της μάντρας (5 μηχανήματα) που σηκώνουν αντικείμενα μεταξύ 7 και 10 τόνων.

**Άσκηση 4. (*Εξεταστική Ιουνίου 2014*)** Μία τυχαία μεταβλητή *X* έχει την παρακάτω συνάρτηση κατανομής πιθανότητας:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<1 \\ \dfrac{x^2-2x+2}{2} & 1\le x<2 \\ 1 & x\ge 2 \end{cases}$$

Να υπολογίσετε α) τις πιθανότητες Ρ*(X>1), P(X<1.5), P(1.5<X<2), P(X>1.8)* και β) την διακύμανση *V(X)* της μεταβλητής

**Άσκηση 5.** (***Εξεταστική Ιουνίου 2014***) Το μέγεθος καταστροφής (εκφρασμένο σε μονάδες εμβαδού) εξαιτίας μιας πυρκαγιάς είναι μία τυχαία μεταβλητή *X* με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x) = \begin{cases} k(20-x) & 0 < x < 20 \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{cases},$$

όπου *k* μία σταθερά. Εάν είναι γνωστό ότι το μέγεθος της καταστροφής έχει ξεπεράσει το *8*, ποια είναι η πιθανότητα να ξεπεράσει το *16*;

**Άσκηση 6.** (***Εξεταστική Σεπτεμβρίου 2014***) Το πλάτος ενός υλικού που παρασκευάζεται σε μια βιομηχανική μονάδα είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο *μ=900* μονάδες και τυπική απόκλιση *σ*. Ποια θα πρέπει να είναι η τιμή του *σ* ώστε με πιθανότητα τουλάχιστον *99%* το πλάτος του υλικού να βρίσκεται μέσα στο διάστημα από *895* έως *905* μονάδες.

**Άσκηση 7.** Έστω $F(x) = \dfrac{1}{1+e^{-(ax+b)}}$ , $x \in \Re$ με a>0. Να δείξετε ότι η F είναι συνάρτηση κατανομής πιθανότητας απολύτως συνεχής. Βρείτε την σ.π.π. *f(x)* και δείξτε ότι ισχύει: *f(x) = a F(x) (1-F(x)).*

**Άσκηση 8.** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$ , $x \in \langle 1,2,\ldots,\infty \rangle$. Δείξτε ότι η *f* αποτελεί συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και στην συνέχεια προσδιορίστε την συνάρτηση κατανομής *F(x).*

**Άσκηση 9.** Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P\left(\dfrac{1}{4} < X \le \dfrac{3}{4}\right)$ αν η σ.π.π. της τ.μ. Χ είναι η $f(x) = cx(1-x)$ , $x \in (0,1)$.

**Άσκηση 10**. Το χαρακτηριστικό *X* ενός προϊόντος ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(\mu=5,\sigma^2=0.0025)$. Το προϊόν θεωρείται κατάλληλο όταν ισχύει ότι $4.9<X<5.1$.

α) Να βρεθεί το ποσοστό των κατάλληλων στο σύνολο της παραγωγής.

β) Ποια η πιθανότητα μεταξύ *4* κομματιών (τυχαία επιλεγμένων) να υπάρχουν *3* τουλάχιστον κατάλληλα

**Άσκηση 11**. Έστω *X* τ.μ. που ακολουθεί την Poisson κατανομή με παράμετρο *λ>0*. Αν ισχύει ότι $E(X^2)=12$ να βρεθεί η τιμή του *λ*.

# 2η ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

## ΑΣΚΗΣΗ 1η

α) Για να είναι η $f(x)$, σ.π.π. θα πρέπει να ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow \cancel{\int_{-\infty}^{0} f(x)dx}^{\,0} + \int_{0}^{\sqrt{2}} f(x)dx + \cancel{\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} f(x)dx}^{\,0} = 1$$

$$\Leftrightarrow \int_{0}^{\sqrt{2}} c\cdot x\,dx = 1 \Leftrightarrow c\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{2}} = 1 \Leftrightarrow c\cdot\left(\frac{2}{2}-\frac{0}{2}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{c = 1}$$

β) Είναι: $f(x) = \begin{cases} x, & 0<x<\sqrt{2} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

Οπότε: $F(x) = \begin{cases} 1, & x \geq \sqrt{2} \\ \frac{x^2}{2}, & 0 \leq x \leq \sqrt{2} \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

γ) $$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx = \cancel{\int_{-\infty}^{0} x\cdot f(x)dx}^{\,0} + \int_{0}^{\sqrt{2}} x\cdot f(x)dx + \cancel{\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} x\cdot f(x)dx}^{\,0}$$

$$= \int_{0}^{\sqrt{2}} x\cdot x\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{3}$$

Επίσης: $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx = \dots = \int_0^{\sqrt{2}} x^2 \cdot x\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}} = 1$

Άρα: $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 1 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

## ΑΣΚΗΣΗ 2η

Ορίζω την ΤΜ $X$: τελικός βαθμός στα μαθήματα του 3ου εξαμήνου του Τμήματος

Τότε $X \sim N(60, 625) \rightsquigarrow \mu = 60,\ \sigma = 25$

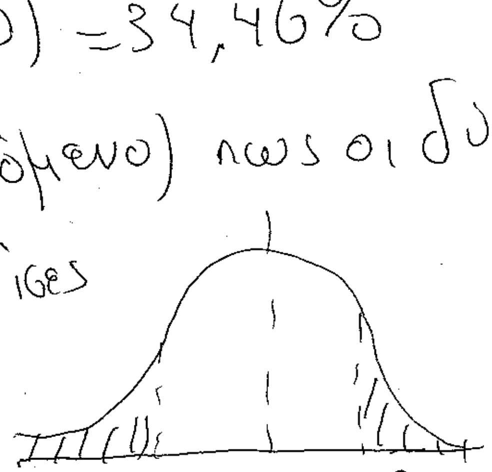
α1) $P(X \leq 50) = P\left(\frac{X-60}{25} \leq \frac{50-60}{25}\right) = P(Z \leq -0.4)$

$\overset{\text{συμμετρική}}{=} P(Z \geq 0.4) = 1 - P(Z \leq 0.4) = 1 - 0.6554 = 34,46\%$

α2) $P(X \geq 70) = P\left(\frac{X-60}{25} \geq \frac{70-60}{25}\right) = P(Z \geq 0.4)$

$= 1 - P(Z \leq 0.4) = P(X \leq 50) = 34,46\%$

(*) Παρατηρώ (όπως ήταν αναμενόμενο) πως οι δύο ζητούμενες πιθανότητες είναι ίσες αφού ισαπέχουν από την μέση τιμή ($\mu = 60$) και η κανονική κατανομή είναι συμμετρική



$a_3)$ $P(70 \le X \le 90) = P\left(\frac{70-60}{25} \le \frac{X-60}{25} \le \frac{90-60}{25}\right)$

$= P(0.4 \le Z \le 1.20) = P(Z \le 1.20) - P(Z \le 0.4)$

$= F(1.20) - F(0.4) = 0.8849 - 0.6554 = 22,95\%$

β)

Ορίζω την ΤΜ Y: αριθμός μαθημάτων στα οποία η βαθμολογία είναι τουλάχιστον 70

Η $Y \sim B(n=5, p=0.3446)$

αφού: • έχει μόνον 2 δυνατά αποτελέσματα (να είναι τουλάχιστον 70 ή να μην είναι)

- Η πιθανότητα επιτυχίας p παραμένει σταθερή από δοκιμή σε δοκιμή (διαγώνισμα σε διαγώνισμα) και ίση με $p=0.3446$
- Οι δοκιμές (διαγωνίσματα) είναι στατιστικά ανεξάρτητες (δηλαδή δεν επηρεάζει το πως έγραψα σε ένα μάθημα, στο πως θα γράψω σε άλλο).

Άρα ζητείται η: $P(Y \ge 2) = \overbrace{1 - P(Y<2)}^{\text{συμπληρωματική}}$

$= 1 - [P(Y=0) + P(Y=1)] =$

$= 1 - \left[\binom{5}{0} \cdot 0,3446^0 \cdot (1-0,3446)^5 + \binom{5}{1} \cdot 0,3446^1 \cdot (1-0,3446)^4\right]$

$= \ldots$

## ΑΣΚΗΣΗ 3η

• Έστω η ΤΜ Χ: αντοχή του ανυψωτικού μηχανήματος (σε τόνους)

$X \sim N(8,9) \rightarrow \mu = 8,\ \sigma = 3$

$\alpha_1)$ $P(X \le 10) = P\left(\frac{X-8}{3} \le \frac{10-8}{3}\right) = P(Z \le 0.67)$

$= 0{,}7486 = 74{,}86\%$

$\alpha_2)$ $P(7 \le X \le 10) = P\left(\frac{7-8}{3} \le \frac{X-8}{3} \le \frac{10-7}{3}\right)$

$= P(-0.33 \le Z \le 1) = P(Z \le 1) - P(Z \le -0.33)$

$\cancel{= P(Z \le 1) - [1 - P(Z \ge 0.33)] =}$

$= P(Z \le 1) - P(Z \ge 0.33)$

$= P(Z \le 1) - [1 - P(Z \le 0.33)]$

$= P(Z \le 1) + P(Z \le 0.33) - 1$

$= 0.8413 + 0.6293 - 1 = 47{,}06\%$

β) Έστω η ΤΜ Υ: αριθμός μηχανημάτων που είναι σε θέση να σηκώνουν αντικείμενα μεταξύ 7 και 10 τόνων.

Τότε $Y \sim B(n=5,\ p=0.4706)$ → Δες άσκηση 2β

Απαίτηση: $P(Y \ge 3) = 1 - P(Y < 3) = 1 - [P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2)]$

$= 1 - \left[\binom{5}{0} \cdot 0{,}4706^0 \cdot (1-0{,}4706)^5 + \binom{5}{1} \cdot 0{,}4706^1 \cdot (1-0{,}4706)^4 + \binom{5}{2} \cdot 0{,}4706^2 \cdot (1-0{,}4706)^3\right.$

$= \ldots$

γ) Ζητείται το $E(Y)$,

Όμως: $\left.Y \sim B(n,p)\right\} \Rightarrow E(Y) = n \cdot p =$

$= 5 \cdot 0,4706 = 2,353$

$\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΗ } 4^{η}}$

α) $P(X>1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F(1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$P(X<1.5) = P(X\leq 1) + P(1 \leq X < 1.5) =$

$= \frac{1}{2} + F(1.5) - F(1) = \frac{1.5^2 - 2 \cdot 1.5 + 2}{2} - \frac{1^2 - 2\cdot 1 + 2}{2} =$

$= 0.5 + 0.625 - \frac{1}{2} = 0.625 = \frac{5}{8}$

$P(1.5 < X < 2) = P(X \leq 2) - P(X < 1.5)$

$= 1 - 0.625 = 0.375$

$P(X > 1.8) = 1 - P(X \leq 1.8) = 1 - \frac{1.8^2 - 2 \cdot 1.8 + 2}{2}$

$= 1 - 0.82 = 0.18$

β) $Var X = E(X^2) - (E(X))^2$

Πρώτα θα βρω την σ.π.π. $f(x)$, παραγωγίζοντας την $F(x)$

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & 1 \le x \le 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Οπότε: $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx = \dots = \int_1^2 x \cdot (x-1)\,dx$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{7}{3} - \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{14-9}{6}\right) = \frac{5}{6}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx = \dots = \int_1^2 x^2(x-1)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \left(\frac{2^4}{4} - \frac{2^3}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{15}{4} - \frac{7}{3}\right) = \frac{45-28}{12} = \frac{17}{12}$$

Οπότε: $\mathrm{Var}X = E(X^2) - (E(X))^2$

$$= \frac{17}{12} - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{51}{36} - \frac{25}{36} = \frac{26}{36}$$

$$= \frac{13}{18}$$

## ΑΣΚΗΣΗ 5

Εύρεση του κ

Για να είναι η $f(x)$ σππ, πρέπει:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow \dots \int_0^{20} \kappa(20-x)\,dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \kappa \cdot \left[20x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{20} = 1 \Leftrightarrow \kappa(400-200) = 1 \Leftrightarrow \boxed{\kappa = \frac{1}{200}}$$

Ζητείται η: $P(X>16 / X>8) = \dfrac{P(X>16 \cap X>8)}{P(X>8)}$

$$= \frac{P(X>16)}{P(X>8)} = \frac{1-P(X\le 16)}{1-P(X\le 8)}$$

$$= \frac{1-\int_0^{16}\frac{1}{200}(20-x)\,dx}{1-\int_0^{8}\frac{1}{200}(20-x)\,dx}$$

$$= \frac{1-\frac{1}{200}\cdot\left[20x-\frac{x^2}{2}\right]_0^{16}}{1-\frac{1}{200}\cdot\left[20x-\frac{x^2}{2}\right]_0^{8}} = \frac{1-\frac{1}{200}\cdot\left(20\cdot 16-\frac{16^2}{2}\right)}{1-\frac{1}{200}\cdot\left(20\cdot 8-\frac{8^2}{2}\right)}$$

$$= \frac{1-\frac{1}{200}\cdot(320-128)}{1-\frac{1}{200}(160-32)} = \frac{8/200}{72/200}$$

$$= 1/9$$

$\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΗ 6}}$

Έστω η ΤΜ $X$: πλάτος υλικού που παρασκευάζεται στην βιομηχανική μονάδα

$X \sim N(900, \sigma)$

Θέλω: $P(895 < X < 905) \geq 99\%$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{895-900}{\sigma} < X < \frac{905-900}{\sigma}\right) \geq 0.99$$

$$\Leftrightarrow P\left(-\frac{5}{\sigma} < X < \frac{5}{\sigma}\right) \geq 0.99$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot P\left(0 < X < \frac{5}{\sigma}\right) \geq 0.99$$

$$\Leftrightarrow P(0 < X < 5/\sigma) \geq 0.495$$

$$\Leftrightarrow P(X < 5/\sigma) - \frac{1}{2} \geq 0{,}495$$

$$\Leftrightarrow P(X < 5/\sigma) \geq 0.995$$

Από πίνακα τυπικής κανονικής κατανομής

Προκύπτει: $Z_{0,995} = 2.575$

ποσοστιαίο σημείο με πιθανότητα 99,5%

Οπότε, πρέπει: $\frac{5}{\sigma} = 2{,}575$

$$\Leftrightarrow \sigma = \frac{5}{2{,}575} = \underline{1.94}$$

$\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΗ 9}}$

$$P\left(\frac{1}{4} < X \le \frac{3}{4}\right) = P\left(X \le \frac{3}{4}\right) - P\left(X \le \frac{1}{4}\right)$$

$$= \int_0^{3/4} cx\cdot(1-x)\,dx - \int_0^{1/4} cx\cdot(1-x)\,dx$$

$$= \int_0^{3/4} c\cdot x(1-x)\,dx + \int_{1/4}^{0} cx(1-x)\,dx$$

$$= \int_{1/4}^{3/4} c\cdot x\cdot(1-x)\,dx$$

Όμως, για να είναι η $f(x)$ σπп, πρέπει:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \iff \dots \int_0^1 cx(1-x)\,dx = 1$$

$$\iff c\cdot\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 1 \iff c\cdot\frac{1}{6} = 1 \iff c = 6$$

Άρα: $P\left(\frac{1}{4} < X \le 3/4\right) = \int_{1/4}^{3/4} 6x(1-x)\,dx$

$$= 6\cdot\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right] = 6\cdot\left(\frac{(3/4)^2}{2} - \frac{(3/4)^3}{3} - \frac{(1/4)^2}{2} + \frac{(1/4)^3}{3}\right)$$

$$= 6\cdot\left(\frac{9-1}{32} - \frac{27-1}{192}\right) = 6\cdot\left(\frac{6\cdot 8 - 26}{192}\right) = \frac{22}{32} = \frac{11}{16}$$

## ΑΣΚΗΣΗ 10

$85 \cdot 10^{-4}$

$X \sim N(\mu = 5, \sigma^2 = 0.0025) \to \sigma = 0.05$

X: κατάλληλο όταν: $4,9 < X < 5,1$

α) Θέλω $P(4.9 < X < 5.1) = P\left(\frac{4.9 - 5.0}{0.05} < X < \frac{5.1 - 5.0}{0.05}\right)$

$= P(-2 < Z < 2) = 2P(0 < Z < 2) = \ldots$

$= 2 \cdot [P(Z < 2) - 1/2]$ ~~σχεδόν 100%~~

$= 2 \cdot (0.9772 - 0.5) = 2 \cdot 0,4772 = 95,44\%$

β) Έστω Y: ΤΜ που περιγράφει τον αριθμό των κομματιών που είναι κατάλληλα

Είναι: $Y \sim B(n = 4, p =$ πιθανότητα 1ου ερωτήματος$)$

Άρα, ζητείται: $P(Y \geq 3) = P(Y = 3) + P(Y = 4)$

$= \binom{4}{3} \cdot 0,9544^3 \cdot (1 - 0,9544)^1 + \binom{4}{4} \cdot 0,9544^4 \cdot (1 - 0,9544)^0$

$= \ldots$

$\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΗ 11}}$

$X \sim Po(\lambda)$

Γνωρίζω ότι αν $X \sim Po(\lambda) \Rightarrow \begin{cases} E(X) = \lambda \\ Var(X) = \lambda \end{cases}$

Όμως: $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$\Rightarrow E(X^2) = (E(X))^2 + Var(X)$

$\Rightarrow 12 = \lambda^2 + \lambda \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 12 = 0$

$\Leftrightarrow (\lambda + 4)(\lambda - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -4 & \text{Απορρίπτεται} \\ \lambda = 3 & \text{δεκτή} \end{cases}$

Η λύση $\lambda = -4$ απορρίπτεται αφού $\lambda > 0$.

$\lambda$: ~~αριθμός αφ~~ μέσος αριθμός αφίξεων στην μονάδα του χρόνου

$\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΗ 7}}$

- $F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$
- $F'(x) > 0 \Rightarrow F \uparrow$

$\Bigg\} \Rightarrow F$: σ.κ.π.

- $a \cdot F(x) \cdot (1 - F(x)) = \ldots$ πράξεις $= f(x)$

# ΑΣΚΗΣΗ 8

Για να είναι η $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$, σ.π.π., πρέπει:

$$\sum_{x=1}^{\infty} f(x) = 1$$

Παρατηρώ ότι: $f(x) = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$

Οπότε, πρέπει: $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) = 1$

$$\Leftrightarrow \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\right) \checkmark$$

Ο.Ε.Δ.

Παρατηρώ ότι:

~~$f(1) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2!}$, $f(2) = \frac{1}{6}$, $f(3) =$~~

$f(1) = \frac{1}{2} = \frac{0!}{2!}$, $f(2) = \frac{1!}{6} = \frac{1}{3!}$, $f(3) = \frac{1}{12} = \frac{2!}{4!}$

$f(4) = \frac{1}{20} = \frac{3!}{5!} \Rightarrow \dots f(x) = \frac{(x-1)!}{(x+1)!}$ ???